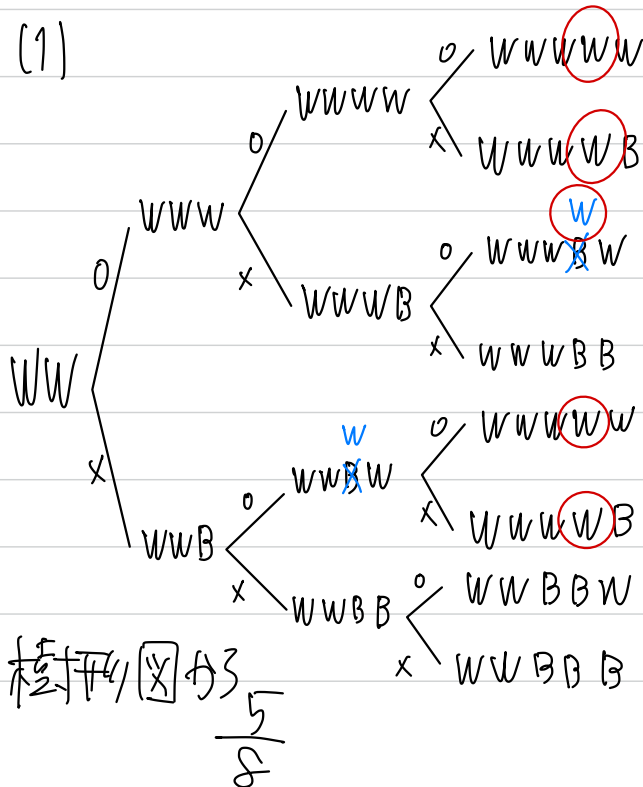
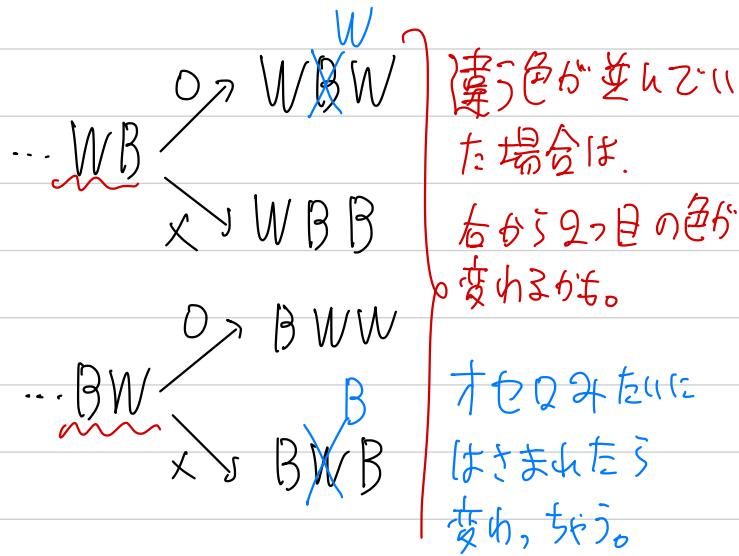
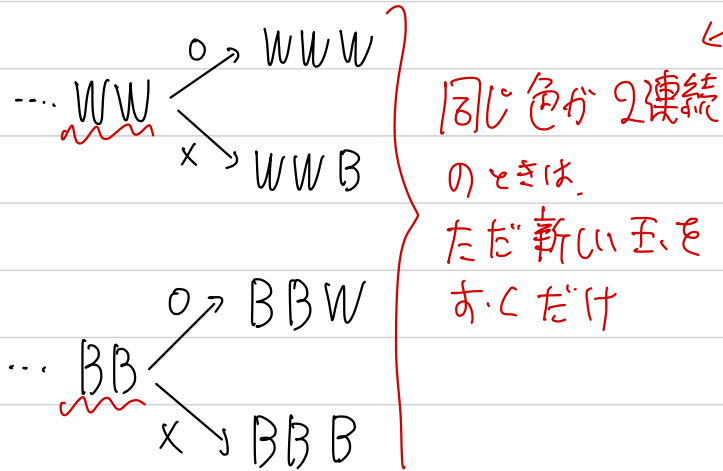


簡単のため、白玉はW、黒玉はB、コイの表は0、裏はXとします。

まず、ルールの正確に理解



(2)(3)この辺りでや、右のように、列の一番右と、二番目の2つだけ見れば、その後の展開がわかる。(左の方は関係ない)

手順(X)をN回行ったあと、

$$\begin{cases} WW \text{ の状態を } P, \text{ その確率を } p_n \\ BB : Q : q_n \\ WB : R : r_n \\ BW : S : s_n \end{cases}$$

とする

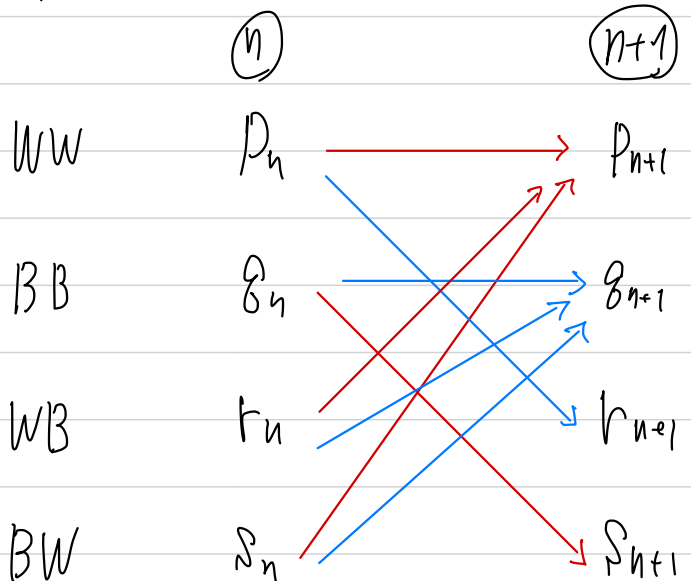
$n=0, n=1$ のときの樹形図

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} \\ q_1 = 0 \\ r_1 = \frac{1}{2} \\ s_1 = 0 \end{cases} \quad \text{である。}$$



(1)で樹形図を作っておくと便利♪

p_n, q_n, r_n, s_n の遷移図を作ると、



表は赤い矢印、裏は青い矢印

遷移図を参考に漸化式を立てる。

$$\begin{cases} P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}S_n \dots ① \\ g_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}S_n \dots ② \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}P_n \dots ③ \\ S_{n+1} = \frac{1}{2}g_n \dots ④ \end{cases}$$

また、必ず P, Q, R, S のどれかの状態になるのだから、

$$P_n + g_n + r_n + S_n = 1 \dots ⑤$$

①～⑤ から、漸化式を解く。

※ ここからは、漸化式が解ければ良いので、

色々な方法が考えられますが、思いつきやすそうなものを、いくつか紹介します。

また、(2) は $P_n + r_n$ (3) は P_n を求めればよいですが、 g_n, S_n について値を出します。

解法

着想

P_n と g_n , r_n と S_n が似ているから、和や差をとってみる。

$$\begin{cases} P_{n+1} + g_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}g_n + r_n + S_n \quad \text{⑥ (代入して解4式)} \\ P_{n+1} - g_{n+1} = \frac{1}{2}P_n - \frac{1}{2}g_n \quad \text{⑦ (このまま使う)} \\ r_{n+1} + S_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}g_n \quad \text{⑧ (右辺が同じ)} \\ r_{n+1} - S_{n+1} = \frac{1}{2}P_n - \frac{1}{2}g_n \quad \text{⑨ (⑤を使う、面白そう)} \end{cases}$$

色々気付けるので、(7)が使いやすそう。

⑦より $P_{n+1} - g_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n - g_n)$ となる。

$\{P_n - g_n\}$ は初項 $P_1 - g_1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$
公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列

$$P_n - g_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$P_n - g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

⑧を1つずらし、 $r_n + S_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}g_{n-1}$

⑥に代入して、

$$P_{n+1} + g_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}g_{n-1}$$

$$P_{n+1} + g_{n+1} = \frac{1}{2}(P_n + g_n) + \frac{1}{2}(P_{n-1} + g_{n-1}) \quad \text{⑩ (3項間漸化式)}$$

$\{P_n + g_n\}$ の3項間漸化式を解く

⑩ + 算 × ⑦

$$P_n + g_n = Q_n \text{ とし、1つずらし、}$$

$$Q_{n+2} = \frac{1}{2}Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n$$

$$Q_{n+2} - Q_{n+1} = -\frac{1}{2}(Q_{n+1} - Q_n) \quad \text{⑪ (x - x)}$$

$$Q_{n+1} - Q_n = (Q_1 - Q_0) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \begin{matrix} Q_1 = \frac{1}{2} - 0 \\ Q_0 = 1 - 0 \end{matrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$Q_{n+2} + \frac{1}{2}Q_{n+1} = Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n \quad \text{⑫ (⑪に+1)}$$

$$Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n = Q_1 + \frac{1}{2}Q_0$$

$$= 1$$

$$\begin{cases} Q_{n+1} - Q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Q_{n+1} + \frac{1}{2}Q_n = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}Q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1$$

$$Q_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$\therefore P_n + g_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

2025年

東大数学

文系第3問(3)

(1) $p_n + e_n$ は (6) : (5) $\Leftrightarrow h_{n+1} S_n = 1 - p_n - e_n$ を代入し.

$$\begin{aligned} p_{n+1} + e_{n+1} &= \frac{1}{2}(p_n + e_n) + 1 - (p_n + e_n) \\ &= -\frac{1}{2}(p_n + e_n) + 1 \end{aligned}$$

とす.

$$q_{n+1} = -\frac{1}{2} q_n + 1 \quad \text{とす.}$$

3項間より 1:2:1 の式が得られる.

$$p_n - e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p_n + e_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \quad \text{+ (1) の 2:}$$

$$(4) \quad 2p_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$p_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{(3) の答}$$

$$e_n = p_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{よ} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$e_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$e_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(3) に p_n を代入し.

$$h_{n+1} = \frac{1}{2} p_n$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

↓ n を 1 減らす

$$\therefore h_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(4) に e_n を代入

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} e_n$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

↓ n を 1 減らす

$$S_n = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} p_n + h_n &= \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} + \left\{ \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$p_n + h_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{(2) の答}$$

※ ちねみに $n=3$ を代入すると.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{となり (1) の答と一致.}$$

解法 2

発想

(3) の答が p_n を求めることなので. p_n 以外を消去.
 p_n の漸化式を作る.

(1) に (5) $\Leftrightarrow p_n + h_n + S_n = 1 - e_n$ を代入し.

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e_n) \quad \text{または } e_n = (p_n \text{ の式}) \text{ を代入すればよい.}$$

なので作る.

(2) に (5) $\Leftrightarrow e_n + h_{n+1} S_n = 1 - p_n$ を代入し.

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - p_n) \quad \text{作れ!!}$$

n を 1 減らす. $e_n = \frac{1}{2} (1 - p_{n-1})$ を代入

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 - p_{n-1}) \right\}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} p_{n-1}$$

← p_n を e とおいてみる.

解法 1 へ
Go

2025年 東大数学 文系 第3問 ④

$P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$ は 1つおいた項同士の関係式。これは、**偶奇で場合分け**。

※ 1つ n をずらして $P_{n+2} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$ の方が偶奇の漸化式といえる。よくある形。

どちらでもよいが、わかりやすいので

$$P_{n+2} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4} \text{ で進める}$$

(i) $n=2m$ (偶数) のとき

$$P_{2m+2} = \frac{1}{4}P_{2m} + \frac{1}{4}$$

$$P_{2m} = P'_m \text{ とおく}$$

偶奇の漸化式
を解くときに便利

$$P'_{m+1} = \frac{1}{4}P'_m + \frac{1}{4}$$

特性方程式
 $d = \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}$ の $\frac{1}{3}$

$$P'_{m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(P'_m - \frac{1}{3})$$

$$P'_m - \frac{1}{3} = (P'_0 - \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{4})^m \quad P'_0 = P_0 = 1$$

$$P'_m = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^m + \frac{1}{3}$$

P'_m は P_m に戻す

$$\therefore P_{2m} = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^m + \frac{1}{3}$$

$2m=n$ より $m = \frac{n}{2}$

$$P_n = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3} \quad (n \text{ は偶数})$$

(ii) $n=2m-1$ (奇数) のとき

$$P_{2m+1} = \frac{1}{4}P_{2m-1} + \frac{1}{4}$$

$$P_{2m-1} = P''_m \text{ とおく}$$

奇数 ver.

$$P''_{m+1} = \frac{1}{4}P''_m + \frac{1}{4}$$

特性方程式
 $d = \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}$ の $\frac{1}{3}$

$$P''_{m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(P''_m - \frac{1}{3})$$

$$P''_m = (P''_1 - \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{4})^{m-1} + \frac{1}{3} \quad P''_1 = P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_{2m-1} = \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{m-1} + \frac{1}{3}$$

P''_m は P_m に戻す

$$P_n = \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{3}$$

$n=2m-1$ より
 $m = \frac{n+1}{2}$
$(n \text{ は奇数})$

$$\text{よって} \begin{cases} n \text{ が偶数のとき} & P_n = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{4})^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3} \\ n \text{ が奇数のとき} & P_n = \frac{1}{6}(\frac{1}{4})^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

※ 解法1 で求めた

$$P_n = \frac{1}{3} + (\frac{1}{2})^{n+1} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n+1} \text{ と}$$

違う式に見えるが、確かめてみれば同じになる。

つまり別の表現というだけ。これはこれで正しい。

でも、偶奇に分かれています。 a_n, b_n, s_n などと区別するのが面倒なので、オス×はしなう。